3次元空間における回転の表現

2021年10月13日

蚊野　浩

3次元空間での回転の表現はクォータニオンを用いることを基本とし、必要に応じて、回転行列との間で相互変換することが望ましい。オイラー角の利用は必要最小限にとどめるのが良い。

1.　各軸まわりの回転による表現（オイラー角）

3次元空間における回転は 3×3 の行列 $\boldsymbol{R}$ で表現できる。$\boldsymbol{R}$ を導く方法がいくつかあり、最も基本的なものが各軸回りの回転を合成する方法である。

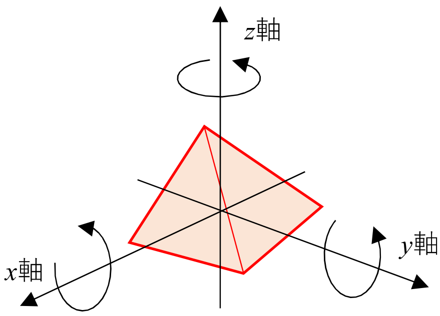

図1 各軸回りの回転

図1のように立体を軸ごとに回転させ、x 軸回りの回転行列を $\boldsymbol{R}_x$、y 軸回りの回転行列を $\boldsymbol{R}_y$、z 軸回りの回転行列を $\boldsymbol{R}_z$ とすると、軸ごとの回転行列は次式になる。

$$\boldsymbol{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

全体としての回転を表す行列 $\boldsymbol{R}$ は軸ごとの回転を合成したものになり、最初に x 軸回転、次いで y 軸回転、最後に z 軸回転を行うと$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_z\boldsymbol{R}_y\boldsymbol{R}_x$である。この時の回転の順序は、用いる用途ごとに慣行はあるようだが、確実に決まった順序はない。

3次元空間における回転を、直交する 3 軸の軸ごとの回転に分解したものをオイラー角という。オイラー角による表現は理解が容易であるが、実際的な用途では使いにくい場面（ジンバルロックが発生するなど）がある。また、$\boldsymbol{R}_x$、$\boldsymbol{R}_y$、$\boldsymbol{R}_z$ を適用する順序によって、一

般的に、合成される回転行列 $\boldsymbol{R}$ が異なる。

2.　回転行列の性質

回転行列は直交行列（正規直交行列）であり、逆に、直交行列は回転行列である。直交行列は転置行列と逆行列が等しくなる正方行列である。つまり、$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$としたとき、どの列、どの行も単位ベクトルになっており、また、異なる列と列、異なる行と行の内積が 0 である。

3.　ロール、ピッチ、ヨーの回転

飛行機や船舶のような乗り物において進行方向の軸回りの回転をロール回転という。水平方向の軸回りの回転をピッチ、垂直方向の軸回りの回転をヨーとよぶ。ロール、ピッチ、ヨーで表現された 3 次元回転はオイラー角による表現と等価である。

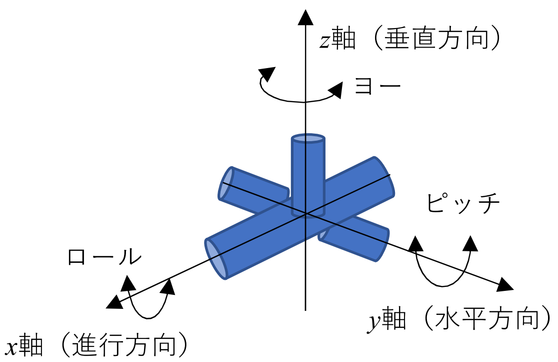

図 2 ロール、ピッチ、ヨー

4.　任意の軸回りの回転

3 次元の回転は、一つの軸とその軸回りの回転角として表現することも可能である。任意の単位ベクトル(n_x,n_y,n_z)回りに θ 回転する場合の回転行列は、ロドリゲスの公式を使って以下のように求めることができる。

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n & 0 \end{pmatrix}、\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+(\sin\theta)\boldsymbol{K}+(1-\cos\theta)\boldsymbol{K}^2$$

この式を展開し、具体的な 3 × 3 の行列の要素で表現したものは Wikipedia の「ロゴリゲスの回転公式」などに記述がある（式が複雑なのでこれらの Web サイトを参照のこと）。

5.　クォータニオン（四元数）

クォータニオンは複素数を拡張した概念である（ちなみに、複素数は二元数にあたり、実

数は一元数である）。単位クォータニオンは3次元回転の計算に便利な数体系として利用される（以下、単位クォータニオンをクォータニオンと記す）。クォータニオンは4つの数値の組み $q=(x,y,z,w)$であり、(x,y,z)が回転軸を表現し、w が回転角を表現する。4で説明した任意軸回りの回転と、次のように密接に関係している。

$x = n_x \sin\frac{\theta}{2}$、$y = n_y \sin\frac{\theta}{2}$、$z = n_z \sin\frac{\theta}{2}$、$q = \cos\frac{\theta}{2}$

したがって、ロドリゲスの公式を使って回転行列に変換することが可能である。クォータニオンの4つの数値を使って回転行列の3 × 3の要素を表した式は少し複雑になるので、他の Web サイトを参照のこと。サイトによって、式が若干異なるが、クォータニオンの係数の二乗和が1（$x^2+y^2+z^2+w^2=1$）であることによる。

クォータニオンで表現した2つの回転の合成は、2つのクォータニオンの積を計算することで実現できる。クォータニオンの積の計算方法は適当な Web サイトを参照してほしいが、4つの数値に乗算と加算の演算を施し、新たな4つの数値を求める計算である。これに16回の乗算と12回の加算が必要である。2つの3×3回転行列の積を求める計算は、27回の乗算と18回の加算が必要であるから、回転の合成にクォータニオンを用いることで、計算コスト軽減することができる。

6. オイラー角、回転行列、クォータニオンの相互変換

- 「オイラー角　-> 回転行列」は1で示した通り。
- 「回転行列　-> オイラー角」については、文献[3]の「3.2 方向余弦行列からオイラー角表現」を参照。方向余弦行列は回転行列のことである。
- 「クォータニオン -> 回転行列」は5で示した通り。
- 「回転行列 -> クォータニオン」については、文献[3]の「4.3 方向余弦行列からクォータニオン表現」を参照。方向余弦行列は回転行列のことである。
- 「オイラー角 -> クォータニオン」は、軸ごとにクォータニオンを求め、それらの積を求める。
- 「クォータニオン -> オイラー角」に関して、文献[5]には、難しいと書いてある。クォータニオンから回転行列を求め、そこからオイラー角に変換する方法になると思われる。

このように、相互変換することは可能ではある。注意することとして、文献[3]の「3.2 方向余弦行列からオイラー角表現」で $\tan^{-1}$ 関数（atan 関数）を使っているが、引数の分母が0になると計算できないので、atan2 関数を使う方が良い。また、いろいろなところで記述されているオイラー角の不評を考慮すれば、3次元空間の回転の表現はクォータニオンを基本として、必要に応じて回転行列を用いるのが良いと考えられる。

参考文献

[1] 回転行列の表現方法、
http://www.info.hiroshima-cu.ac.jp/~miyazaki/knowledge/tech0007.html
[2] ロドリゲスの回転公式、
https://ja.wikipedia.org/wiki/ロドリゲスの回転公式
[3] MATLAB によるクォータニオン数値計算、MSS 技報、Vol.19、pp.44-49、2008 年

クォータニオンについては、たくさんの Web サイトで解説されているので、適当なものを選べばよいですが、例えば

[4] クォータニオン（Quaternionn）を総整理！～三次元物体の回転と姿勢を鮮やかに扱う～、
https://qiita.com/drken/items/0639cf34cce14e8d58a5
[5] 四元数で 3 次元回転（ソースコード付き）、
https://researchmap.jp/blogs/blog_entries/view/77082/74054f82f27b8fe084d5eb7426f55571?frame_id=836719